

11

313 סדר

12 מד

375246553

1.1 - נוכח ישרה מודצת הקבוע מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 4} = 3$$

יהי $\varepsilon > 0$ נבחר $N = \max\left\{\left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil - 2, 3\right\}$ נבחר

אם $n > N$ מתקיים:

~~$n > \frac{8}{\varepsilon} - 2$~~ ~~$n > 3$~~ 2

~~$n^2 > N^2$~~ ~~$n > N$~~ ~~$n > 3$~~

ונקבל:

$$\left| e_n - 3 \right| = e_n - 3 = \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 4} - 3 =$$

2

$$= \frac{3n^2 - 4 - 3n^2 + 12}{n^2 - 4} = \frac{8}{n^2 - 4} = \frac{8}{(n-2)(n+2)} <$$

$$< \frac{8}{n+2} < \frac{8}{N+2} \leq \frac{8}{\left(\left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil - 2\right) + 2} \leq \frac{8}{\frac{8}{\varepsilon} - 2 + 2} = \varepsilon$$

2

$$= \varepsilon$$

קלט שגוי $\varepsilon > 0$ נבחר

אם $n > N$ מתקיים: $N = \max\left\{\left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil - 2, 3\right\}$

נבחר $\varepsilon > 0$ נבחר $N = \max\left\{\left\lceil \frac{8}{\varepsilon} \right\rceil - 2, 3\right\}$ נבחר $n > N$ מתקיים: $|e_n - 3| < \varepsilon$

- 12 pad

$$|p_n - L| \geq \varepsilon$$
$$|x_n - L| \geq \varepsilon$$
[illegible]

$$\sqrt{k^2 - 1} > k - \frac{1}{2}$$

ה/חמא: |כז| 1 > < חל נחמ"ז!

~~$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$~~

~~התוצאה היא 7.37~~

~~$$k^2 - 1 > \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 - k + \frac{1}{4}$$~~

$$\Rightarrow k-1 > \frac{1}{q} \Leftrightarrow k \geq 2 > 1 + \frac{1}{q}$$

$$\frac{2}{k+1} \leq k^2 + (k-1) > k^2 + \frac{1}{4} \quad \square$$

$$\Leftarrow k^2 - 1 > k^2 - k + \frac{1}{4} \Leftarrow$$

$$k^2 - 1 > \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (\Leftarrow)$$

 ~~$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$~~ $(-\frac{1}{2} > 0 \text{ e } |f'(x)| \leq 1)$ [illegible]

$$\sqrt{k^2 - 1} > k - \frac{1}{2}$$

③

$$L \neq \emptyset \quad \rightarrow \quad L \in R \quad \text{" "}$$
$$n = (N+1)^2$$

$n > N$ - e rind ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ ~~29~~ ~~30~~ ~~31~~ ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ ~~37~~ ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ ~~41~~ ~~42~~ ~~43~~ ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ ~~47~~ ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~ ~~51~~ ~~52~~ ~~53~~ ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ ~~57~~ ~~58~~ ~~59~~ ~~60~~ ~~61~~ ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~ ~~65~~ ~~66~~ ~~67~~ ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ ~~71~~ ~~72~~ ~~73~~ ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~ ~~78~~ ~~79~~ ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ ~~83~~ ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ ~~89~~ ~~90~~ ~~91~~ ~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ ~~97~~ ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~ ~~101~~ ~~102~~ ~~103~~ ~~104~~ ~~105~~ ~~106~~ ~~107~~ ~~108~~ ~~109~~ ~~110~~ ~~111~~ ~~112~~ ~~113~~ ~~114~~ ~~115~~ ~~116~~ ~~117~~ ~~118~~ ~~119~~ ~~120~~ ~~121~~ ~~122~~ ~~123~~ ~~124~~ ~~125~~ ~~126~~ ~~127~~ ~~128~~ ~~129~~ ~~130~~ ~~131~~ ~~132~~ ~~133~~ ~~134~~ ~~135~~ ~~136~~ ~~137~~ ~~138~~ ~~139~~ ~~140~~ ~~141~~ ~~142~~ ~~143~~ ~~144~~ ~~145~~ ~~146~~ ~~147~~ ~~148~~ ~~149~~ ~~150~~ ~~151~~ ~~152~~ ~~153~~ ~~154~~ ~~155~~ ~~156~~ ~~157~~ ~~158~~ ~~159~~ ~~160~~ ~~161~~ ~~162~~ ~~163~~ ~~164~~ ~~165~~ ~~166~~ ~~167~~ ~~168~~ ~~169~~ ~~170~~ ~~171~~ ~~172~~ ~~173~~ ~~174~~ ~~175~~ ~~176~~ ~~177~~ ~~178~~ ~~179~~ ~~180~~ ~~181~~ ~~182~~ ~~183~~ ~~184~~ ~~185~~ ~~186~~ ~~187~~ ~~188~~ ~~189~~ ~~190~~ ~~191~~ ~~192~~ ~~193~~ ~~194~~ ~~195~~ ~~196~~ ~~197~~ ~~198~~ ~~199~~ ~~200~~ ~~201~~ ~~202~~ ~~203~~ ~~204~~ ~~205~~ ~~206~~ ~~207~~ ~~208~~ ~~209~~ ~~210~~ ~~211~~ ~~212~~ ~~213~~ ~~214~~ ~~215~~ ~~216~~ ~~217~~ ~~218~~ ~~219~~ ~~220~~ ~~221~~ ~~222~~ ~~223~~ ~~224~~ ~~225~~ ~~226~~ ~~227~~ ~~228~~ ~~229~~ ~~230~~ ~~231~~ ~~232~~ ~~233~~ ~~234~~ ~~235~~ ~~236~~ ~~237~~ ~~238~~ ~~239~~ ~~240~~ ~~241~~ ~~242~~ ~~243~~ ~~244~~ ~~245~~ ~~246~~ ~~247~~ ~~248~~ ~~249~~ ~~250~~ ~~251~~ ~~252~~ ~~253~~ ~~254~~ ~~255~~ ~~256~~ ~~257~~ ~~258~~ ~~259~~ ~~260~~ ~~261~~ ~~262~~ ~~263~~ ~~264~~ ~~265~~ ~~266~~ ~~267~~ ~~268~~ ~~269~~ ~~270~~ ~~271~~ ~~272~~ ~~273~~ ~~274~~ ~~275~~ ~~276~~ ~~277~~ ~~278~~ ~~279~~ ~~280~~ ~~281~~ ~~282~~ ~~283~~ ~~284~~ ~~285~~ ~~286~~ ~~287~~ ~~288~~ ~~289~~ ~~290~~ ~~291~~ ~~292~~ ~~293~~ ~~294~~ ~~295~~ ~~296~~ ~~297~~ ~~298~~ ~~299~~ ~~300~~ ~~301~~ ~~302~~ ~~303~~ ~~304~~ ~~305~~ ~~306~~ ~~307~~ ~~308~~ ~~309~~ ~~310~~ ~~311~~ ~~312~~ ~~313~~ ~~314~~ ~~315~~ ~~316~~ ~~317~~ ~~318~~ ~~319~~ ~~320~~ ~~321~~ ~~322~~ ~~323~~ ~~324~~ ~~325~~ ~~326~~ ~~327~~ ~~328~~ ~~329~~ ~~330~~ ~~331~~ ~~332~~ ~~333~~ ~~334~~ ~~335~~ ~~336~~ ~~337~~ ~~338~~ ~~339~~ ~~340~~ ~~341~~ ~~342~~ ~~343~~ ~~344~~ ~~345~~ ~~346~~ ~~347~~ ~~348~~ ~~349~~ ~~350~~ ~~351~~ ~~352~~ ~~353~~ ~~354~~ ~~355~~ ~~356~~ ~~357~~ ~~358~~ ~~359~~ ~~360~~ ~~361~~ ~~362~~ ~~363~~ ~~364~~ ~~365~~ ~~366~~ ~~367~~ ~~368~~ ~~369~~ ~~370~~ ~~371~~ ~~372~~ ~~373~~ ~~374~~ ~~375~~ ~~376~~ ~~377~~ ~~378~~ ~~379~~ ~~380~~ ~~381~~ ~~382~~ ~~383~~ ~~384~~ ~~385~~ ~~386~~ ~~387~~ ~~388~~ ~~389~~ ~~390~~ ~~391~~ ~~392~~ ~~393~~ ~~394~~ ~~395~~ ~~396~~ ~~397~~ ~~398~~ ~~399~~ ~~400~~ ~~401~~ ~~402~~ ~~403~~ ~~404~~ ~~405~~ ~~406~~ ~~407~~ ~~408~~ ~~409~~ ~~410~~ ~~411~~ ~~412~~ ~~413~~ ~~414~~ ~~415~~ ~~416~~ ~~417~~ ~~418~~ ~~419~~ ~~420~~ ~~421~~ ~~422~~ ~~423~~ ~~424~~ ~~425~~ ~~426~~ ~~427~~ ~~428~~ ~~429~~ ~~430~~ ~~431~~ ~~432~~ ~~433~~ ~~434~~ ~~435~~ ~~436~~ ~~437~~ ~~438~~ ~~439~~ ~~440~~ ~~441~~ ~~442~~ ~~443~~ ~~444~~ ~~445~~ ~~446~~ ~~447~~ ~~448~~ ~~449~~ ~~450~~ ~~451~~ ~~452~~ ~~453~~ ~~454~~ ~~455~~ ~~456~~ ~~457~~ ~~458~~ ~~459~~ ~~460~~ ~~461~~ ~~462~~ ~~463~~ ~~464~~ ~~465~~ ~~4~~

$$|q_n - L| = |\langle \sqrt{N+1}^2 \rangle - L| = |\langle N+1 \rangle - L|.$$

7+1 הנח מספרים ויחידות ההק האם נכנס!

$$\langle N+1 \rangle = (N+1) - \lfloor N+1 \rfloor = (N+1) - (N+1) = 0$$

$$\Rightarrow |e_n - L| = \frac{|L|}{2} - L = |L| = \frac{|L|}{2} + \frac{|L|}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

$0 \leq N$ $\forall L \in \mathbb{R}$ $\forall h$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$
 $\forall L \in \mathbb{R}$ $\forall h$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$

$$|p_n - 2| \geq \varepsilon \quad \text{für} \quad |p_n - 2| > \varepsilon$$

* $1/n \notin L$: $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$

$$0 \neq L \in \mathbb{R} \quad G1$$

1/27 (ה'תש"ז) 1/28

רבינו יצחק בן אברהם

\bullet דאס איז א פארשטעלונג פון L -מאל

גבולות פתוחים.

4

12 / 11

1. להוכיח: לכל $n \in \mathbb{N}$: $n > 1$ מספר ראשוני.

$$\sqrt{n^2-1} \notin \mathbb{N}$$

כלומר קיים מספר n כך ש-

הוכחה: (כל $n > 1$ מספר ראשוני או מ مرکב) בראש:

$$n = \sqrt{n^2} > \sqrt{n^2-1} > n - \frac{1}{2}$$

כלומר:

$$n > \sqrt{n^2-1} > n-1$$

$$\sqrt{n^2-1} \text{ הוא מספר טבעי} \Leftrightarrow$$

נצטרך להוכיח שהסדרה $e_n = \langle \sqrt{n} \rangle$ מתכנסת ל-0.

$$e_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (לדוגמה)} \quad \text{כל } n \text{ טבעי (לדוגמה)}$$

$$n = \max\{n^2-1, 3\}$$

$$n > N \Leftrightarrow n=3 \quad \text{כאשר } N=1 \text{ (לדוגמה)}$$

$\varepsilon > 0$
מספר טבעי
קיים

$$\text{כל } n > N \Rightarrow n^2 > n+1$$

$$(n = n^2 - 1 \geq 3) \quad n > N \Leftrightarrow n^2 - 1 > N \Leftrightarrow$$

אנחנו מקבלים: $n > N \geq 1$ (אם מספר ראשוני).

$$n=3 \quad \text{כאשר } N=1 \text{ (לדוגמה)}$$

$$e_n = \langle \sqrt{3} \rangle \Leftrightarrow$$

ההוכחה: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (אם n מספר טבעי) $\langle \sqrt{3} \rangle < \sqrt{3}$ (לדוגמה)

$$\langle \sqrt{3} \rangle = \sqrt{3} - \langle \sqrt{3} \rangle > 0 \Leftrightarrow \text{(אם } n \text{ מספר טבעי) } \langle \sqrt{3} \rangle > 0$$

5

12 חזר

המשפט

$$|q_n - 0| = |q_n| = \left| \left\langle \sqrt{3} \right\rangle \right| = \left\langle \sqrt{3} \right\rangle = \frac{\left\langle \sqrt{3} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \sqrt{3} \right\rangle}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

סדר $N > 1$ וצד מה שהחלט

המספר $n = N^2 - 1$ הוא מספר שלם
 (על מנת להוכיח שהמספר n הוא מספר שלם - כלומר הוא מספר שלם)
 (על מנת להוכיח שהמספר n הוא מספר שלם - כלומר הוא מספר שלם)

$$\langle \sqrt{n} \rangle = n - [n] > 0$$

כאשר n הוא מספר שלם וכן $[n]$ הוא המספר השלם הקרוב ביותר ל- n

$$N = \sqrt{N^2} = \sqrt{n+1} > \sqrt{n} = \sqrt{N^2-1} > N - \frac{1}{2}$$

$$N > \sqrt{n} > (N-1) + \frac{1}{2} > N-1$$

~~$$\langle \sqrt{n} \rangle = N - (N-1) = 1$$~~

~~$$\langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [n] = \sqrt{n} - (N-1)$$~~

אם n הוא מספר שלם

$$\langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [n] = \sqrt{n} - (N-1) > \frac{1}{2}$$

אם x הוא מספר שלם אז $0 \leq \langle x \rangle < 1$

$$\langle \sqrt{n} \rangle > \frac{1}{2} > \frac{\langle \sqrt{3} \rangle}{2} = \varepsilon$$

$$|q_n - L| = |\langle \sqrt{n} \rangle - 0| = \langle \sqrt{n} \rangle > \varepsilon$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

(6) $\langle \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ $\epsilon > 0$ ק"י $L = 0$ ϵ עבור ϵ מספיק קטן:
 כן, ϵ מספיק קטן $\epsilon > 0$ ϵ מספיק קטן $\epsilon > 0$ ϵ מספיק קטן
 כן, ϵ מספיק קטן: $|\epsilon_n - \epsilon| \geq \epsilon$ ϵ מספיק קטן.
 והסבר: הוסיפו ג'אן ϵ , ϵ מספיק קטן ϵ מספיק קטן ϵ מספיק קטן.

7

הכלל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^7 - \pi} = 0 \quad \text{לפי 10.2}$$

הוכחה!

$\left(\begin{array}{l} \text{לפי 10.2} \\ \text{לפי 10.2} \\ \text{לפי 10.2} \end{array} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^7 - \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - \frac{5}{n^2} + \frac{9}{n^7}}{\frac{2}{n^4} - 4 - \frac{\pi}{n^7}} = \dots$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^2} + \frac{9}{n^7} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^3} - 4 - \frac{\pi}{n^7} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^7}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^7}} \\
 &= \frac{0 - 0 + 0}{0 - 4 - 0} = \frac{0}{-4} = 0.
 \end{aligned}$$

הוכחה $(e_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{2}{n^2}$ - 1 - 0

$(c_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^2}$ - 1 - 0
 $(b_n)_{n=1}^{\infty} = 2$ - 1 - 0
 $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^2}$ - 1 - 0
 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$ - 1 - 0
 (הוכחה)

(הוכחה) $(e_n)_{n=1}^{\infty} = 4$ - 1 - 0
 (הוכחה) $(b_n)_{n=1}^{\infty} = 2$ - 1 - 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^7 - \pi} = \frac{5}{4}$$

הוכחה, הוכחה, הוכחה

8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^5 - \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - 5 + \frac{9}{n^5}}{\frac{2}{n} - 4 - \frac{\pi}{n^5}} =$$

(12/11)

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} - 5 + \frac{9}{n^5} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - 4 - \frac{\pi}{n^5} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^5}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^5}} =$$

$$= \frac{0 - 5 + 0}{0 - 4 - 0} = \frac{5}{4} \quad (12/11)$$

9

12 פת
... (12) ...

$$\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}} = \frac{\frac{4n}{4n}}{\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}$$

∴ (12) ... $\sqrt{n-2} < \sqrt{n+2}$ ∴ $\sqrt{n} > 5$ ∴

$$\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n+2}} < \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} < \frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}} \quad \text{Ⓢ} < =$$

~~∴ ...~~

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}$$

∴ ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{n}} = 1$$

∴ ... $\frac{n}{n-2}$...

$$n > n-2 > 0 \Rightarrow \frac{n}{n-2} > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n-2}} > \sqrt{1} = 1$$

∴ ...

$$1 < \sqrt{\frac{n}{n-2}} < \frac{n}{n-2}$$

∴ ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-2}} = 1 \quad \text{∴ ...}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-2}} = 1: (2.1) \quad 2.2g \quad \text{Gut 1. (2.1), d. 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} \quad \leftarrow$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}}$$

$\therefore -e$ फलित हो

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-1}}{h+2} = -\frac{1}{2} \quad : h, 2 \text{ s/o}$$

אמסוקה סוף / נגה: (מדינת יקד א צא) - נכס, נקודת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{n}{n+2}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{n}{n-2}} = 2$$

הנהגת בעל תלפזן (אח) וילד (אח) : צרור

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = 2$$

27

מקרה 2

למשל: 1) נניח $n \geq 5$ נבדוק:

3.2

$$n^2 > 2n + 1$$

נבדוק: $n=5$ נקבל: $25 > 11$ (1/1)

הנניח:

נניח נכון לכל $n \geq 5$ נבדוק:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2$$

↓
הנניח נכון לכל $n \geq 5$

$$2n > 3 \Leftrightarrow n \geq 2 \Leftrightarrow n > 1$$

נבדוק:

$$4n > 2n + 3 = 2(n+1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^2 > 4n + 2 > 2(n+1) + 1$$

נבדוק:

~~נניח נכון לכל $n \geq 5$~~ נבדוק: $n^2 > 2n + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$$

~~נניח נכון לכל $n \geq 5$~~ נבדוק: $n^2 > 2n + 1$

$$0 < \frac{2n+1}{2^n} < \frac{n^2}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

נבדוק: 2.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$$

נבדוק:

2.5. המעק. | נספח | סדרה | (C_n) | בצורה | המעק:

$$C_n = \begin{cases} C_n = 1 & n < 5 \\ C_n = 2^n - n^2 & n \geq 5 \end{cases}$$

$$C_n > 0 \quad h \quad \int_0^1 \quad \underline{\text{surv}}$$

7/28 h<5 57 27

$C_5 = 32 - 15 = 17$ (נקב) $n = 5$ 7/28

נניח $z = x + iy$ ונכתוב (z) ונקבל $x + iy$

~~$$C_{n+1} = 2^{n+1} - n^2 - 2n - 1 > 2^n - n^2 > C_n$$~~

$$\Rightarrow C_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)^2 = 2^{n+1} - n^2 - 2n - 1 >$$

$$> 2^{n+1} - 2n^2 = 2(2^n - n^2) = 2C_n > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{for } n \text{ odd} \\ -n^2 < -2n-1 \\ n \geq 5 \end{array} \right\}$$

12215

קניין וטעם (C) חלוצים

(א) כן, הן $n \geq 5$ (הקלות, $n \geq 0$)

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2^{n+1} - n^2 - 2n - 1}{2^n - n^2} = \frac{2 - \frac{n^2}{2^n} - \frac{2n+1}{2^n}}{1 - \frac{n^2}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}} =$$

$$\downarrow \quad \frac{2-0-0}{1-0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = 2$$

57 x/100

2.4.9 סח' אסוקה
סח' אסוקה 2.4.9

$(n-1) \times 1$

2.2g (משקל) (גדול) של 230 מילי, המשקל הנצפה של המוצק
 (המשקל הנצפה של המוצק הוא 2.2g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$e_n = \frac{n}{n+3} : (e_n) \text{ נורמת}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)} = \frac{1}{1+3 \cdot 0} = 1$$

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i}{i+3}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i : (b_n) \text{ ממוצע}$$

(e_n) היא הנורמה הנורמלית של (b_n) המשקל הנצפה של המוצק
 המשקל הנצפה של המוצק הוא 2.5g

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} b_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1 \cdot 1 = 1$$

18

12 מרץ

3.3. (נניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$) קיבלנו :
 כלומר : קיים N_1 כזה ש $n > N_1$ אז $a_n > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1 \quad \text{כאשר } b_n \neq 0 \text{ (כל } n \text{)}$$

כלומר קיים N_2 כזה ש $n > N_2$ אז $|a_n b_n - 1| < \frac{1}{2}$ (בחרנו $\epsilon = \frac{1}{2}$)
 אז $\frac{1}{2} < a_n b_n < \frac{3}{2}$.

$$N = \max\{N_1, N_2\} : \text{לפיכך}$$

$$\text{אם } n > N \text{ אז } a_n > 0 \quad (10) \quad \text{②} \quad \frac{1}{2} < a_n b_n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2a_n} < b_n$$

$$\Rightarrow \text{כלומר } b_n \text{ חיובית}$$

לסיכום : הוכחנו (כדור)

3.4. א) (כדור) : נניח

$$(a_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

$$(b_n) = \begin{cases} 2 & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

כלומר :

$$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots)$$

$$(b_n) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

72 pm

$$e_{abn} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \therefore \text{Yes } n \quad \text{Yes}$$

כאמ"ל

$$e_n b_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 1$$

2.1.1 2m 5y

נחל ים שני הסדר חילוקי. ואם ין חלקי נחל
ה-4. (י"ח) ששטחן 4 מטרסטר.
ה' ה' (ה' 4) מטרסטר.

$(2 \in R) \cdot L$ \rightarrow مركب $(e_n) - e$ ~~مركب~~ $n, 1$

~~Handwritten musical notation on a five-line staff, featuring a treble clef and several notes.~~

$\frac{1}{8} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$|q_n - L| < \frac{1}{n}$$

כאשר: $N > n$ נק' n של N נק' n של N :

$$\rho_{n_1} = \frac{1}{2} \quad \left| \rho_{n_2} - L \right| < \frac{1}{8}$$

∴ $1^{\text{st}} \text{ } h_2 > 1$ 5/6

$$P_{n_2} = 1 \quad \left| P_{n_2} - L \right| < \frac{1}{8}$$

1901. 2nd 11/12 1872

$$\frac{1}{2} = \left| -\frac{1}{2} \right| = \left| p_{n_1} - p_{n_2} \right| = \left| (p_{n_1} - L) + (L - p_{n_2}) \right| \leq \left| p_{n_1} - L \right| + \left| L - p_{n_2} \right| = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

מ"מ

77

באמצעות ההנחה ϵ - (ϵ_n) מופיעה קבוצה ~~אפשרית~~
אם $\frac{1}{2} < \frac{1}{\epsilon} \leq \frac{1}{2}$ אזי סתירה. בהנחה $\epsilon - (\epsilon_n)$

אם מניחים

דוגמה: (ϵ_n) : בקיצור : נבחר $\epsilon = \frac{1}{8}$
אזי ההנחה נכשלת!

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\epsilon} \text{ אזי סתירה.}$$

אם ϵ_n : לא מתקיים הסתירה.

דוגמה : האם (ϵ_n) יכולה

הנחה : $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = \infty$ ואם ϵ_n יכולה להיות $\epsilon_n = \infty$ וקבוצה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} = 0$$

כאן ϵ_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 1$

אזי ϵ_n :

$$\epsilon_n = \epsilon_n \cdot \frac{1}{\epsilon_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \cdot \frac{1}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\epsilon_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

178

המשפט

3.3. האם יש (כאן)?

נניח:

היה (e_n) הסדרה המוגדרת על ידי: $e_n = \frac{(-1)^n}{n}$

וכי (b_n) מוגדרת על ידי: $b_n = (-1)^n n$

הסדרה e_n מתכנסת ל-0 כי המונה קטן על הסדרה

אסמיה וסדרה אספה. הסדרה b_n לא מתכנסת

אם יש לנו גורם הרוח (שלג 36 ע) כן: n

$$e_{b_n} = \frac{(-1)^{b_n}}{b_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n n} = \frac{1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e_{b_n} = 1$$

כלומר קיבלנו שיש סכום סתמי של זרימה בסדרה
ככה פוגקים: $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{b_n} = 0$ אם b_n לא מתכנסת

אם $e_{b_n} = 0$ (חבלה) או מילכד

3.7. האם נכונה.

סוף (e_n) חליף אל ברכי כמדל כל n

חש קיילי וזה מ/פיה בהוכחה של 4.5 ט
גמל דל.

1.3. נכונה / לא. n גמל מתקיים:

13

22/11

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$$

$$\text{כל } n \in \mathbb{N} \text{ : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 0$$

כל $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

כל $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$$

כל $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 0$

20

12

3.3. גורם מכונה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

מסלול 2.70 (מסלול) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$

מקרים $a_n > 0$

כלומר קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים:

2.17 (מסלול) $|a_n/b_n| = a_n/b_n \Leftrightarrow a_n/b_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/b_n| = 1$$

נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$: אז

~~$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$~~

~~$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$~~

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n/b_n}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n/b_n|}{|a_n|} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/b_n|}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left| \frac{a_n/b_n}{a_n} \right| = |b_n| \quad \text{כי}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1 \Leftrightarrow$$